

huitième partie:

Cinématique et dynamique du corps solide indéformable

Notions abordées:

- 8.1 Cinématique du solide, distribution des vitesses
- 8.2 Théorèmes relatif au moment cinétique
- 8.3 Calcul du moment cinétique
- 8.4 Energie cinétique
- 8.5 Roulement sans glissement
- 8.6 Rotation autour d'un axe fixe
- 8.7 Rotation autour d'un point fixe

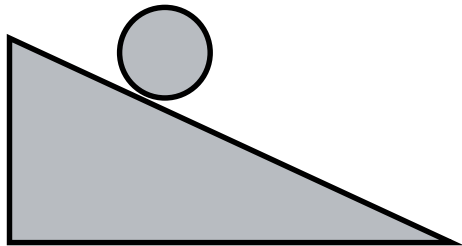
Buts:

- apprendre à décrire le mouvement d'un corps solide
- savoir écrire les équations du mouvement d'un corps solide
(théorèmes du centre de masse et du moment cinétique)

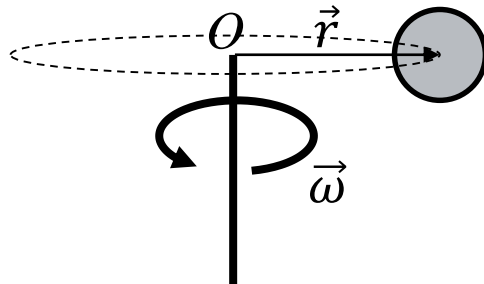
8.1 Comparaison qualitative

Point materiel de masse m

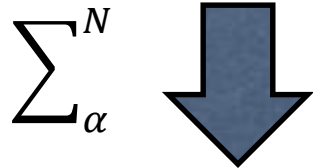
Glissement ou rotation



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

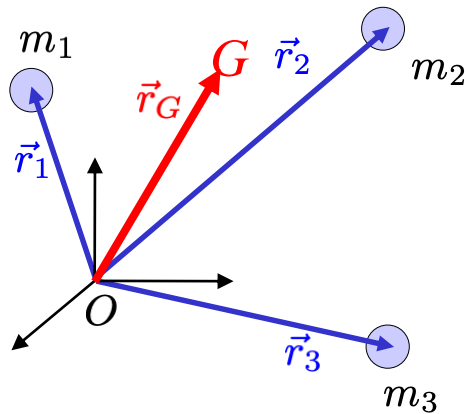


$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$



$$\sum_{\alpha}^N$$

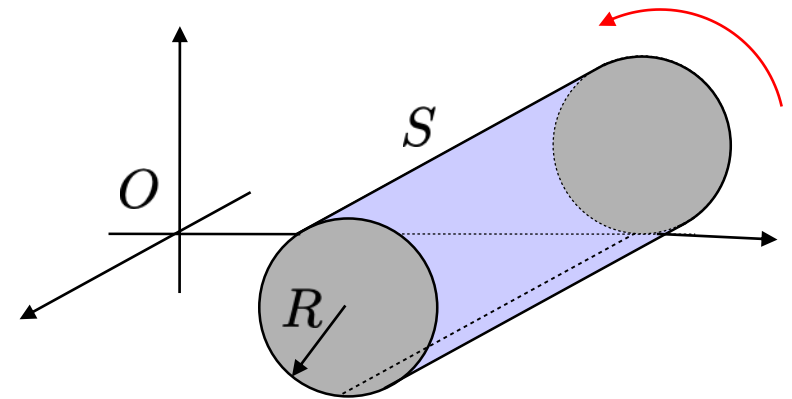
système de points matériels



$$\vec{p} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = M \vec{v}_G \quad \vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$$

Solide indéformable

Glissement et rotation



$$\vec{p} = M \vec{v}_G$$

$$\vec{L}_O = \tilde{I}_O \vec{\omega}$$

$$\int \rho \dots dr^3$$

\tilde{I}_O est le moment d'inertie

8.1 Corps solide indéformable

• Définition: **solide indéformable = système de points matériels, fixes les uns par rapport aux autres**

• Remarques:

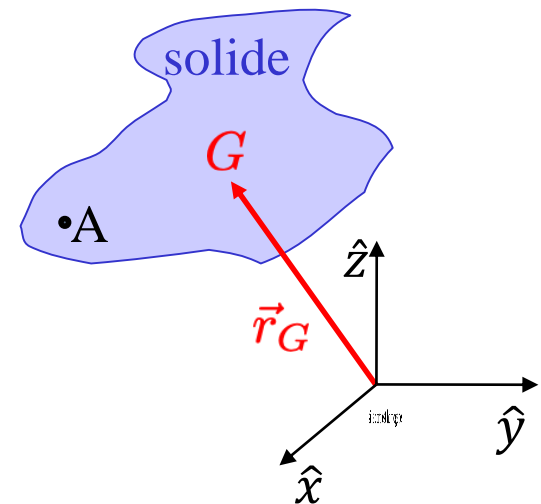
- Tous les corps solides réels se déforment sous l'effet des forces appliquées; le solide indéformable est un modèle mathématique (bonne approximation si les déformations sont petites par rapport aux dimensions du solide).
- Le nombre N de points matériels peut être très grand ($N \rightarrow \infty$); on remplace alors les sommes sur ces N points par des intégrales. Par exemple, pour le centre de masse:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} m_{\alpha} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{M} \int \vec{r} dm(\vec{r}) = \frac{1}{M} \int_{\text{Volume}} \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad \rho(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{d^3r}$$

si le corp est homogene $\rho(\vec{r}) = \frac{M}{V}$

• Position d'un solide:

- **6 coordonnées indépendantes**
- Ex., : position d'un point + orientation du solide
 - 3 coord. pour un des points
 - 3 angles pour définir l'orientation du solide par rapport à ce point
- Ex., vitesse d'un point A \vec{v}_A (3 composantes du vecteur) + une vitesse de rotation $\vec{\omega}$ (3 composantes du vecteur)



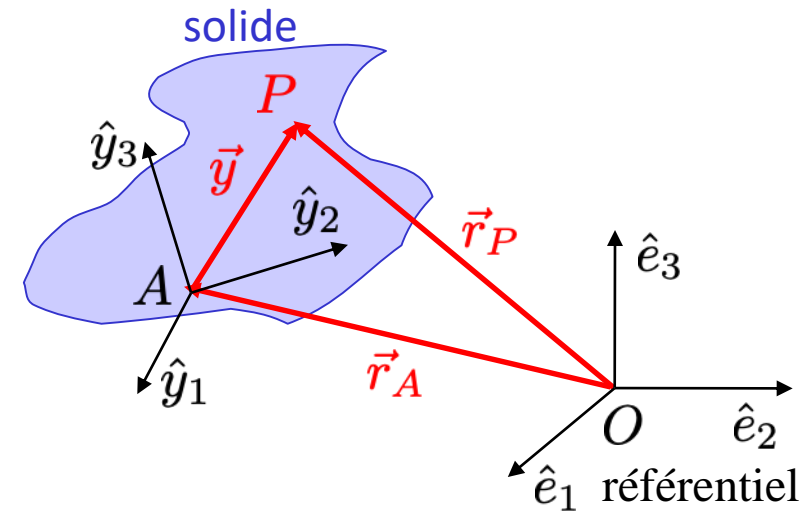
8.1 Vitesse et accélération d'un point du solide

• Repère lié au référentiel $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$

• Repère lié au solide $A\hat{y}_1\hat{y}_2\hat{y}_3$

(A = point quelconque du solide)

- Tous les points P du solide sont immobiles dans ce repère
- Pour tout vecteur \vec{y} immobile dans ce repère on a:



$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum y_i \hat{y}_i \right) = \sum y_i \underbrace{\frac{d\hat{y}_i}{dt}}_{\vec{\omega} \wedge \hat{y}_i} = \vec{\omega} \wedge \sum y_i \hat{y}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{y}$$

formule de Poisson \rightarrow

$\vec{\omega}$ = vitesse angulaire instantanée de rotation du repère $A\hat{y}_1\hat{y}_2\hat{y}_3$, donc du solide

• Pour tout point P du solide (par rapport à $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$) :

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \overrightarrow{AP}) = \vec{v}_A + \frac{d}{dt}\overrightarrow{AP} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})$$

Avec $\vec{\omega}$ indépendant de P, de A et du choix du repère $A\hat{y}_1\hat{y}_2\hat{y}_3$

8.1 Mouvement instantané d'un solide (cinématique)

- Soit A un point quelconque du solide:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} \quad \forall P \in \text{solide}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} \quad \text{avec } \vec{v}'_P = 0$$

On peut trouver les mêmes relation pour \vec{v}_P et \vec{a}_P en utilisant les formules pour le changement de référentiel

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} \quad \text{avec } \vec{v}'_P = 0, \vec{a}'_P = 0, O' = A$$

- Le mouvement instantané du solide est l'un des quatre suivants:

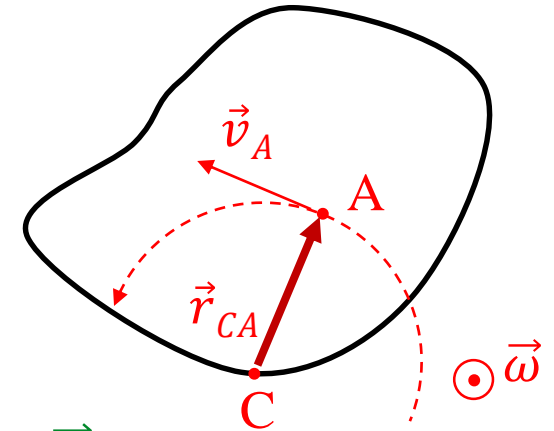
- $\vec{\omega} = 0$ et $\vec{v}_A = 0$ $\Leftrightarrow \vec{v}_P = 0$ $\forall P \Leftrightarrow$ solide au repos
- $\vec{\omega} = 0$ et $\vec{v}_A \neq 0$ $\Leftrightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A \neq 0$ $\forall P \Leftrightarrow$ solide en translation
- $\vec{\omega} \neq 0$ et $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0$ $\Leftrightarrow \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0$ $\forall P \Leftrightarrow$ solide en rotation (axe $\parallel \vec{\omega}$)
- $\vec{\omega} \neq 0$ et $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \neq 0$ $\Leftrightarrow \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \neq 0$ $\forall P \Leftrightarrow$ solide en mvt hélicoïdal
(rotation d'axe $\parallel \vec{\omega}$ + translation $\parallel \vec{\omega}$)

8.1 Axe instantané de rotation

Si $\vec{\omega} \neq 0$, il existe un et un seul axe de rotation instantané

Comment trouver un point C sur l'axe instantané de rotation?

Plan perpendiculaire à $\vec{\omega}$



$$\begin{aligned} \vec{r}_{CA} \perp \vec{v}_A \\ \vec{r}_{CA} \perp \vec{\omega} \end{aligned} \Rightarrow \vec{r}_{CA} = b \vec{v}_A \wedge \vec{\omega} \quad b \text{ à déterminer}$$

Dans un mouvement circulaire: $v = \omega r$

$$r_{CA} = \frac{v_A}{\omega} = b v_A \omega \Rightarrow b = \frac{1}{\omega^2} \Rightarrow \vec{r}_{CA} = \frac{1}{\omega^2} \vec{v}_A \wedge \vec{\omega}$$

Au cour du temps

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{v}_A + \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A) = \vec{v}_A + \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A) \vec{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \omega^2 \vec{v}_A = \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A) \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0 \Rightarrow \vec{v}_C = 0$$

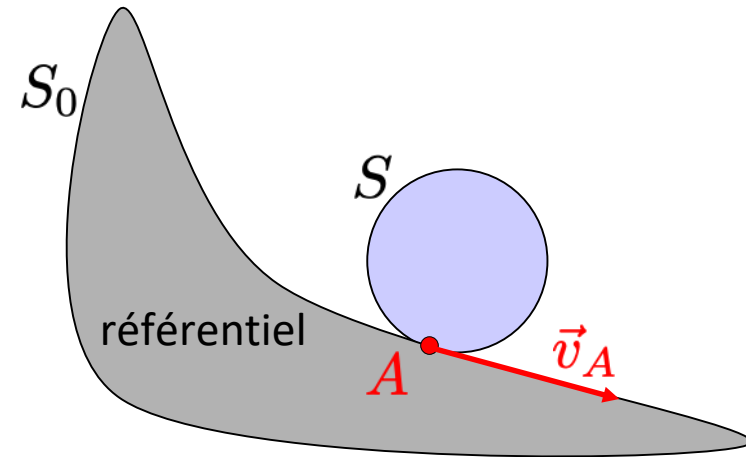
Les points sur l'axe instantané de rotation sont immobiles: **rotation**

$$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A \neq 0 \Rightarrow \vec{v}_C \parallel \vec{\omega}$$

Les points sur l'axe instantané de rotation ont un mouvement de translation parallèle à $\vec{\omega}$: mouvement **hélicoïdal**

8.1 Solides en contact

- Soient deux solides S et S_0 restant constamment en contact
 - On choisit l'un des deux solides, S_0 , comme référentiel
 $\Rightarrow S_0$ est immobile et on décrit le mouvement de S par rapport à S_0
 - On admet que le contact est ponctuel.
 Soit A le point de S en contact avec S_0 au temps t

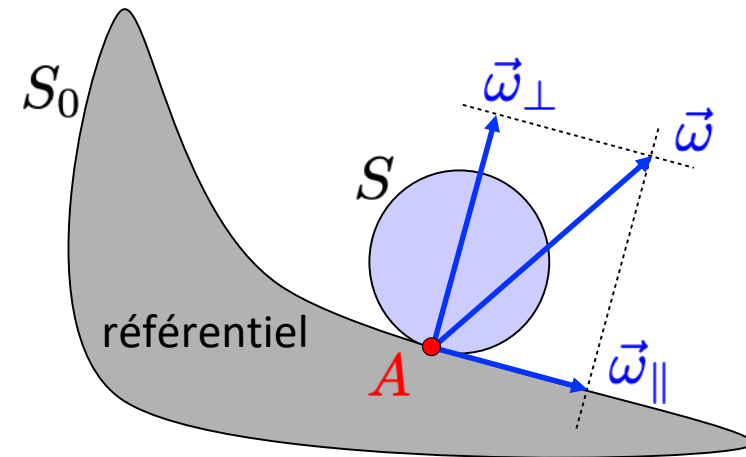


- \vec{v}_A vitesse de glissement (de S par rapport à S_0)
- Condition du roulement sans glissement : $\vec{v}_A = 0$
 - A est alors sur l'axe instantané de rotation

- Vecteur instantané de rotation $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{//} + \vec{\omega}_{\perp}$
- Décomposition en composantes parallèle et perpendiculaire au plan tangent commun à S et S_0 en A :

$\vec{\omega}_{//}$ = vitesse angulaire de roulement

$\vec{\omega}_{\perp}$ = vitesse angulaire de pivotement



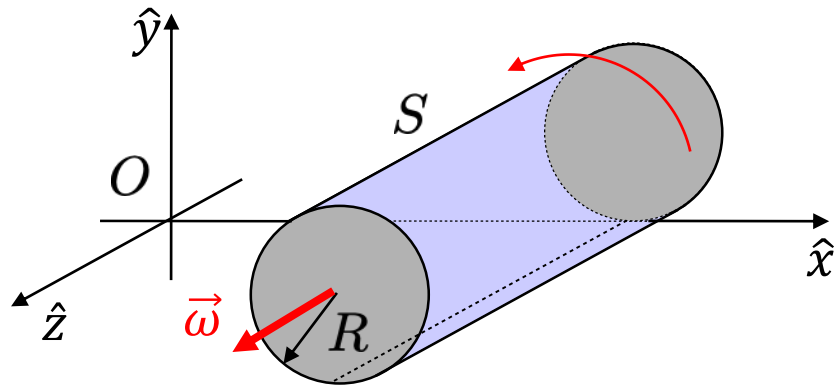
Résumé. Si $\vec{\omega} \neq 0$:

$\vec{v}_A = 0$: roulement sans glissement autour d'un axe par A

$\vec{v}_A \perp \vec{\omega}$: rotation (avec glissement)

$\vec{v}_A \parallel \vec{\omega}$: $\vec{r}_{CA} = \frac{1}{\omega^2} \vec{v}_A \wedge \vec{\omega} = 0 \Rightarrow$ axe de rotation passe par A (mouvement **hélicoïdal**)

8.1 Ex.: cylindre sur un plan sans glissement

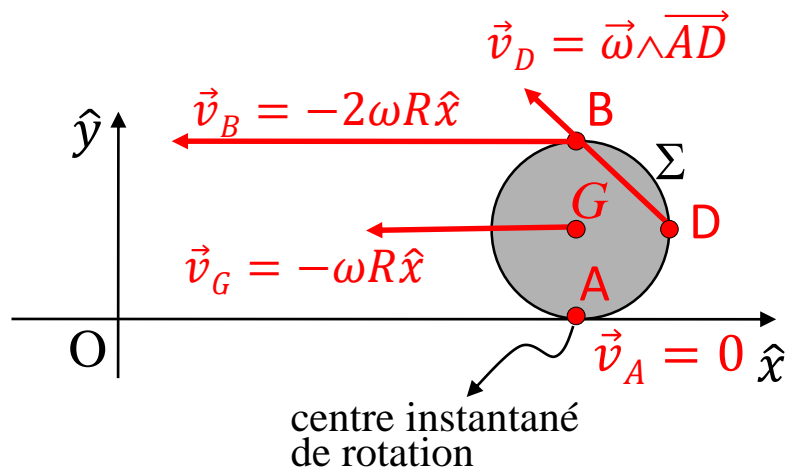


- En trois dimensions:
 - Un cylindre S de rayon R roule sans glisser sur le plan Oxz d'une table S_0 , avec la ligne de contact parallèle à l'axe \hat{z}
 - $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ = vitesse angulaire de roulement (il n'y a pas de pivotement)

- Dans le plan Oxy
 - On considère la section Σ du cylindre
 - $\vec{v}_A = 0$ (pas de glissement) $\Rightarrow A$ est le **centre instantané de rotation** \Rightarrow pour chaque point P de Σ on a que $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$

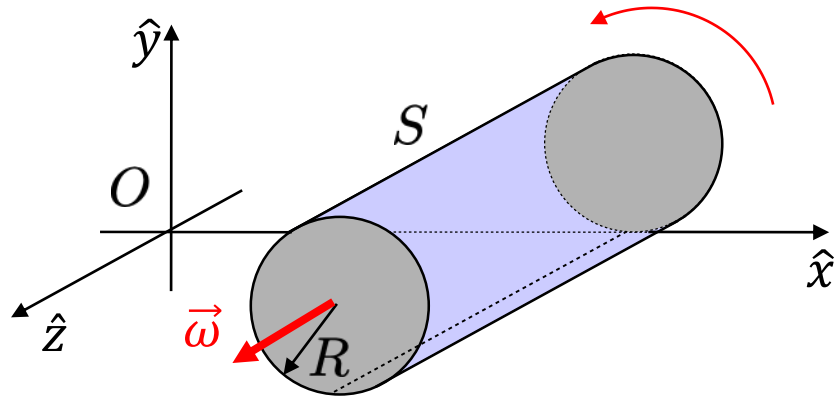
- Par ex.:

$$\vec{v}_D = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R \\ \omega R \\ 0 \end{pmatrix}$$



8.1 Ex.: cylindre sur un plan sans glissement

- Trajectoire du CM et d'un point sur la surface du cylindre qui roule ($\vec{\omega} = \omega \hat{z}$) sans glisser :



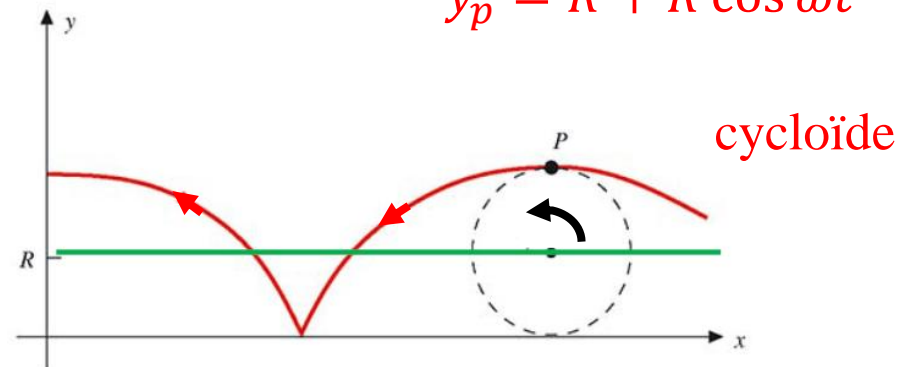
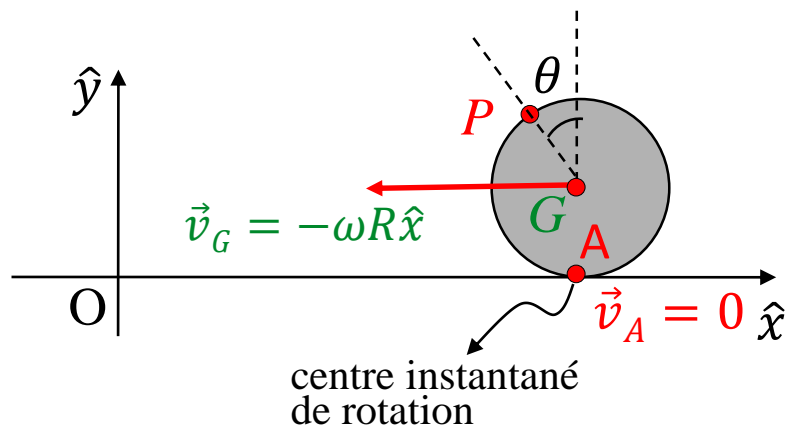
- CM: $\vec{v}_G = -\omega R \hat{x} \Rightarrow \begin{cases} x_G = -\omega R t \\ y_G = R \end{cases} \Rightarrow \text{Ligne droite}$

- Point P: se déplace avec G et il tourne autour de G

$$\begin{aligned} \vec{v}_P &= \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP}) \\ &= \omega \hat{z} \wedge (R \hat{y} - R \sin \theta \hat{x} + R \cos \theta \hat{y}) \\ &= -\omega (R + R \cos \theta) \hat{x} - \omega R \sin \theta \hat{y} \\ &= -\omega (R + R \cos \omega t) \hat{x} - \omega R \sin \omega t \hat{y} \end{aligned}$$

$$x_p = -\omega R t - R \sin \omega t$$

$$y_p = R + R \cos \omega t$$



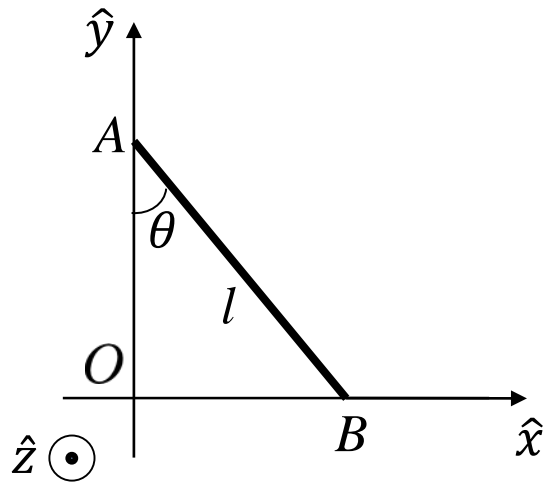
N.B.: dans l'approximation de point matériel, tous les points se déplacent à la vitesse du CM

8.1 Mouvement « plan-sur-plan »

- Définition: mouvement tel qu'un plan Σ du solide S reste constamment dans un plan fixe Π du référentiel
 \Leftrightarrow
à tout instant les vitesses de tous les points du solide sont parallèles à un plan fixe Π du référentiel
- Conséquences:
 - le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$ est perpendiculaire à Π
 - on est ramené à l'étude du mouvement d'une surface plane rigide Σ (section de S) sur un plan Π ;
 - dans ce plan, il y a un centre instantané de rotation (si $\omega \neq 0$)
- Lieu géométrique des centres instantanés de rotation:
 - dans le référentiel lié à Π : **la base**
 - dans le référentiel lié à Σ : **la roulante**

Ex.: dans les cas du cylindre roulant sur une table, $\vec{\omega}$ est perpendiculaire au plan $\Pi = \hat{x}\hat{y}$

8.1 Ex.: barre qui glisse contre un mur dans un plan



- Comme la barre reste dans le plan $\hat{x}\hat{y}$ il s'agit d'un mouvement plan-sur-plan et $\vec{\omega} = \omega \hat{z} = \dot{\theta} \hat{z}$:

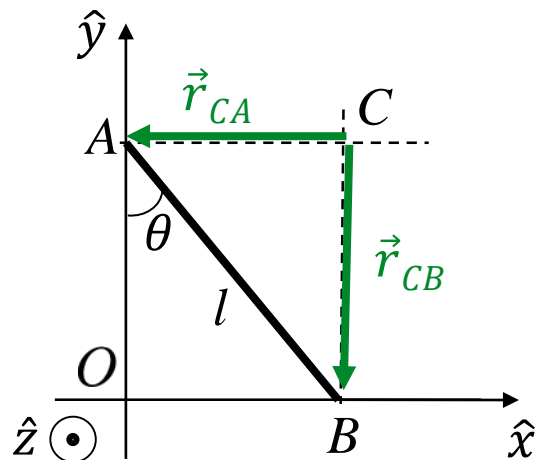
$$\vec{OA} = \vec{r}_A = l \cos \theta \hat{y}$$

$$\vec{v}_A = -l \sin \theta \dot{\theta} \hat{y}$$

$$\vec{OB} = \vec{r}_B = l \sin \theta \hat{x}$$

$$\vec{v}_B = l \cos \theta \dot{\theta} \hat{x}$$

Le point C par le quel passe l'axe instantané de rotation est défini par



$$\vec{r}_{CA} = \frac{1}{\omega^2} \vec{v}_A \wedge \vec{\omega} = -\frac{1}{\omega^2} l \sin \theta \omega^2 \hat{x} = -l \sin \theta \hat{x}$$

$$\vec{r}_{CB} = \frac{1}{\omega^2} \vec{v}_B \wedge \vec{\omega} = \frac{1}{\omega^2} l \cos \theta \omega^2 \hat{y} = l \cos \theta \hat{y}$$

8.2 Théorèmes relatifs au moment cinétique

- Moment cinétique par rapport à O : $\vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$

Par rapport à un point A quelconque on a:

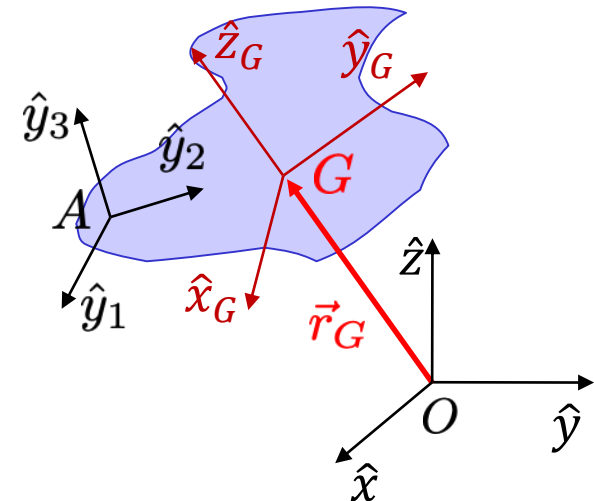
$$\vec{L}_A = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}_{\alpha}) \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \overrightarrow{AO} \wedge \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \Rightarrow$$

- Théorème du transfert: $\Rightarrow \vec{L}_A = \overrightarrow{AO} \wedge M \vec{v}_G + \vec{L}_O$
 $\boxed{\vec{L}_G = \vec{L}_G^*}$ \vec{L}_G^* est le moment cinétique calculé dans le référentiel du CM $G\hat{x}_G\hat{y}_G\hat{z}_G$

$$\vec{L}_G = \sum_{\alpha} \overrightarrow{GP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{GP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} (\vec{v}_{\alpha}^* + \vec{v}_G) = \sum_{\alpha} \overrightarrow{GP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^* + \underbrace{(\sum_{\alpha} \overrightarrow{GP}_{\alpha} m_{\alpha})}_{=0} \wedge \vec{v}_G = \vec{L}_G^* + 0 = \vec{L}_G^*$$

- 1^{er} Théorème de König: $\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G + \vec{L}_G^*}$

Le moment cinétique totale par rapport à O est égale à la somme du moment cinétique de la masse totale M concentrée en CM et du moment cinétique calculé par rapport au CM



8.2 Théorèmes relatifs au moment cinétique

- Evolution du moment cinétique par rapport à O : $\vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G + \vec{L}_G^*$

$$\vec{M}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + \frac{d\vec{L}_G^*}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \dot{\overrightarrow{OG}} \wedge M \vec{v}_G + \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{a}_G + \frac{d\vec{L}_G^*}{dt} \\ &= \vec{v}_G \wedge M \vec{v}_G + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + \frac{d\vec{L}_G^*}{dt} \\ &= \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + \vec{M}_G^{ext*} \end{aligned}$$

$$\vec{M}_O^{ext} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + \vec{M}_G^{ext*} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + \vec{M}_G^{ext}$$

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^*$$

- Théorème du moment cinétique par rapport à un point A quelconque

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} - \vec{v}_A \wedge M \vec{v}_G$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \frac{d}{dt} (\overrightarrow{AO} \wedge M \vec{v}_G + \vec{L}_O) \\ &= \dot{\overrightarrow{AO}} \wedge M \vec{v}_G + \overrightarrow{AO} \wedge M \vec{a}_G + \frac{d\vec{L}_O}{dt} \\ &= -\vec{v}_A \wedge M \vec{v}_G + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{F}^{ext} + \vec{M}_O^{ext} \\ &= -\vec{v}_A \wedge M \vec{v}_G + \overrightarrow{AO} \wedge \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} + \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{ext} \\ &= -\vec{v}_A \wedge M \vec{v}_G + \sum_{\alpha} \overrightarrow{AP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{ext} \\ &= -\vec{v}_A \wedge M \vec{v}_G + \vec{M}_A^{ext} \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} \quad \text{si:} \quad \begin{aligned} \vec{v}_A &= 0, \\ \vec{v}_A &\parallel \vec{v}_G, \\ A &= G \end{aligned}$$

8.2 Théorèmes relatifs au solide

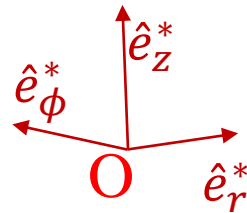
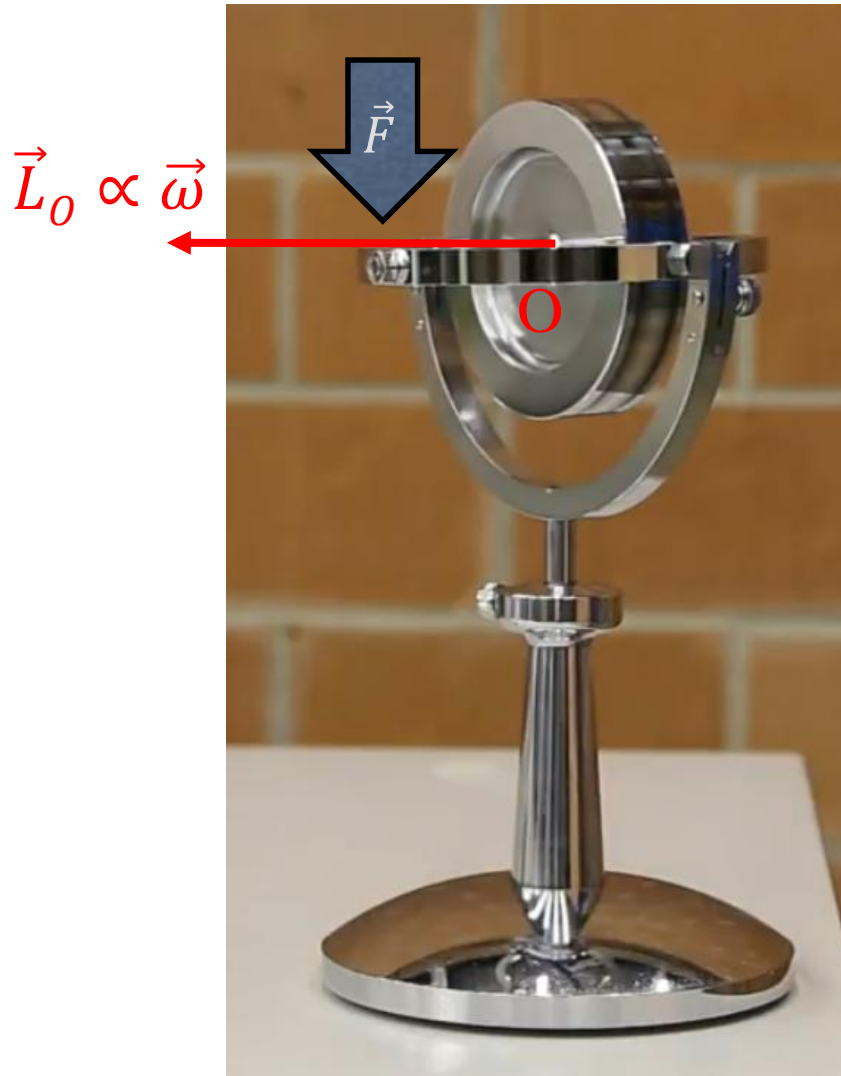
- 2^{er} Théorème de König:

$$K = K^* + \frac{1}{2} M v_G^2$$

L'énergie cinétique totale par rapport à un point O est égale à la somme de l'énergie cinétique du CM et l'énergie cinétique du mouvement relatif autour du CM

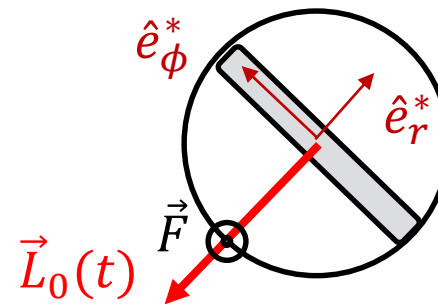
$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{v}_{\alpha}^* + \vec{v}_G)^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (v_{\alpha}^{*2} + v_G^2 + 2\vec{v}_{\alpha}^* \cdot \vec{v}_G) = \\ &K^* + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_G^2 + (\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^*) \cdot \vec{v}_G = K^* + \frac{1}{2} M v_G^2 \end{aligned}$$

8.2 Théorèmes relatifs au solide

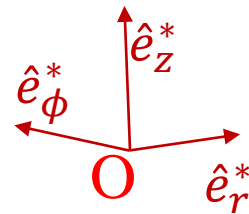
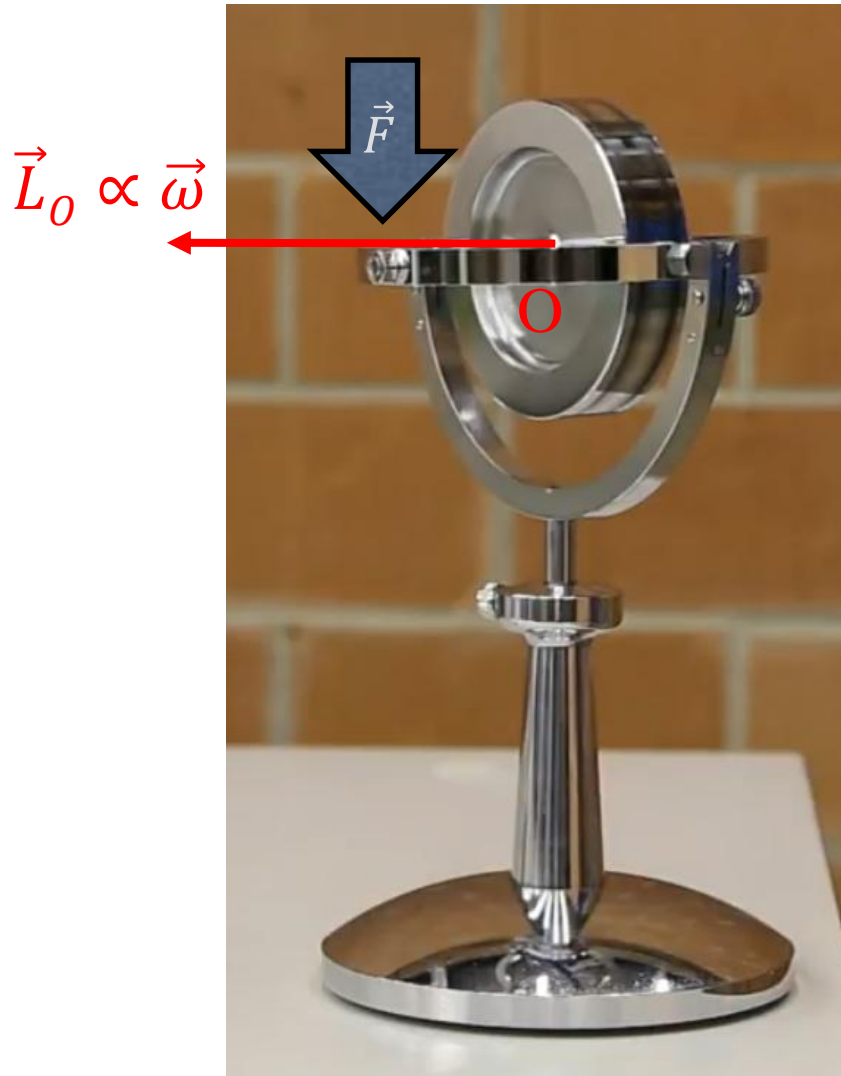


Que fera l'axe du disque?

- 1) Ne bouge pas
- 2) Tourne sens horaire
- 3) Tourne sens anti-horaire



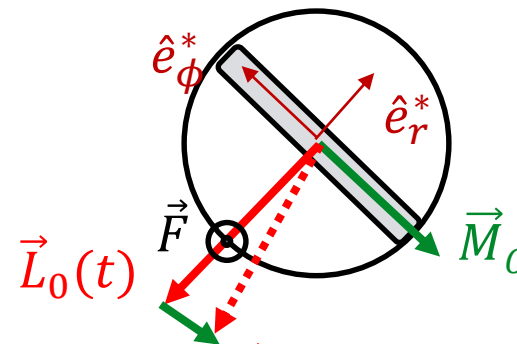
8.2 Théorèmes relatifs au solide



Que fera l'axe du disque?

- 1) Ne bouge pas
- 2) Tourne sens horaire
- 3) Tourne sens anti-horaire

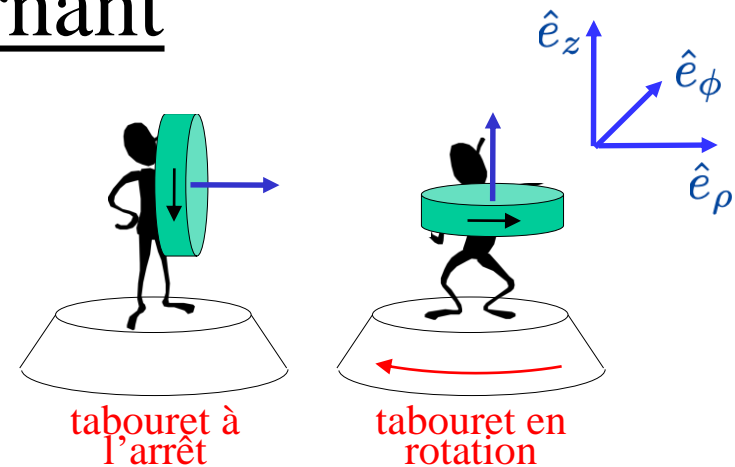
$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \vec{F} = -rF\hat{e}_\phi^*$$



$$d\vec{L}_0(t) = \vec{M}_0 dt \quad \vec{L}_0(t+dt)$$

8.2 Ex.: tabouret tournant

Pourquoi le tabouret tournant sans frottement
(à l'arrêt quand l'axe de la roue est horizontal)
se met-il en rotation quand on force
l'axe de la roue à être vertical ?



Conservation de \vec{L}_z : si le tabouret peut tourner, la composante \hat{e}_z du moment cinétique du système (roue + personne + tabouret) est conservée ($mg\hat{z}$ ne peut pas générer une composante $M\hat{e}_z$)
-> ($L_{z,\text{tot}} = 0 = \text{const}$) -> le tabouret tourne en direction opposé à la roue

force interne: la personne applique une couple de forces sur la roue pour la tourner.

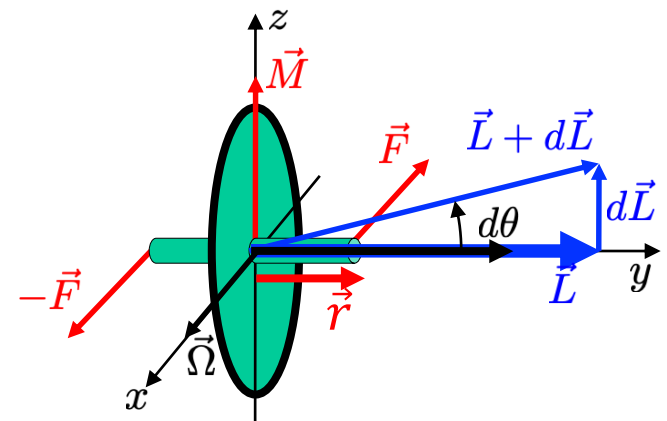
$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{L d\theta}{dt} = L\Omega$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$$

$$\vec{M} = 2\vec{r} \wedge \vec{F} = 2rF = L\Omega$$

rotation autour de
l'axe x avec vitesse
angulaire Ω

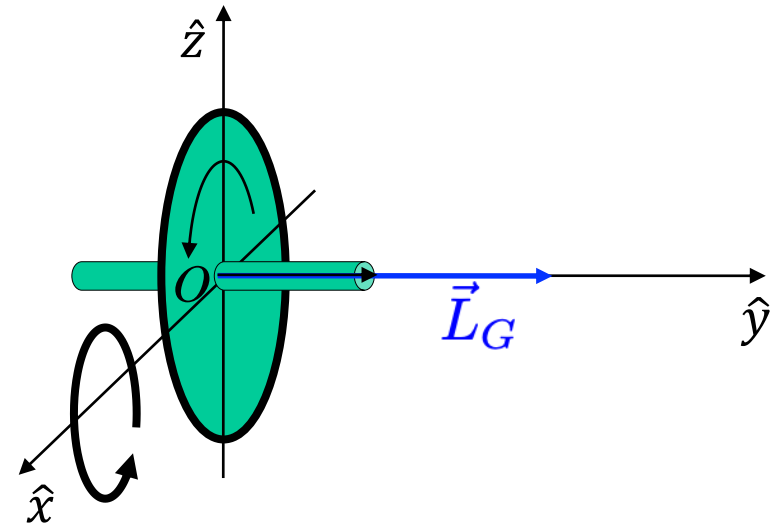
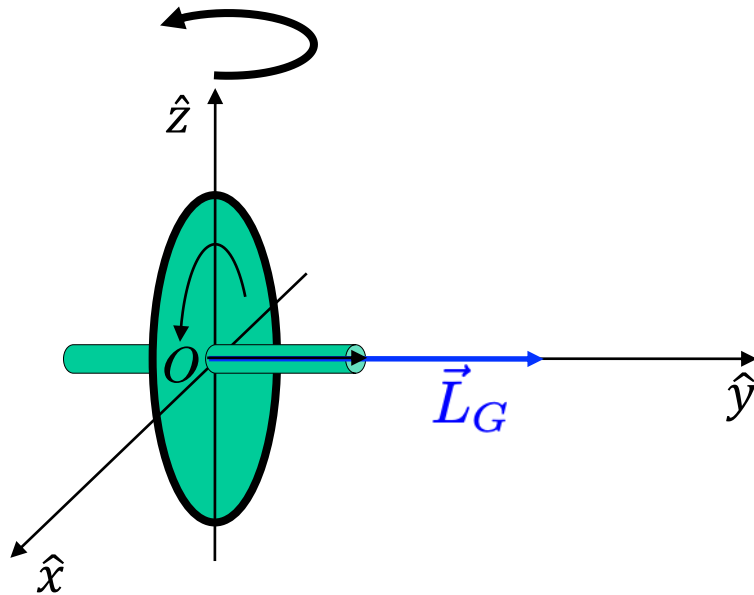
$$F = \frac{L\Omega}{2r}$$



Couple de forces appliquée par la personne
pour tourner l'axe de rotation

8.2 Ex.:Roue du velo

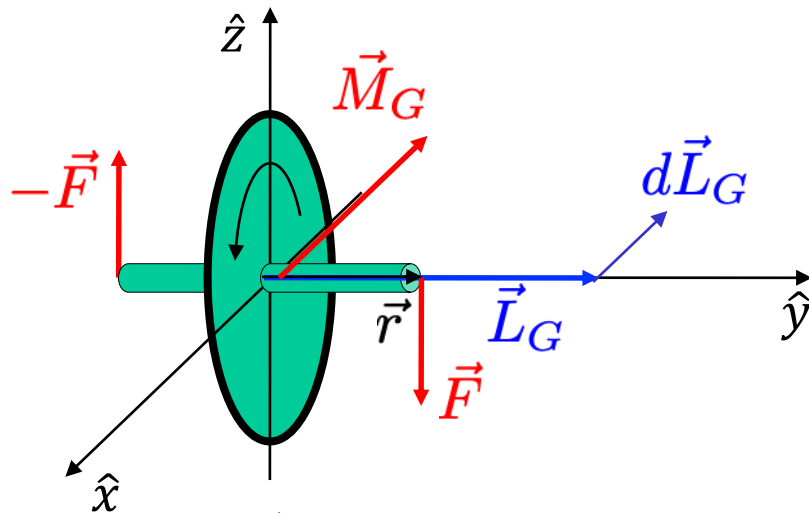
- Roue de vélo en rotation au tour de son axe de symétrie: $\vec{L}_G \parallel \vec{\omega} = \omega \hat{y}$
 - On veut changer la direction de l'axe de rotation; comment faut-il exercer le couple de force pour que l'axe tourne autour de Oz ? ou de Ox ?



8.2 Ex.:Roue du velo

- Roue de vélo en rotation au tour de son axe de symétrie: $\vec{L}_G \parallel \vec{\omega}$
 - On veut changer la direction de l'axe de rotation; comment faut-il exercer le couple de force pour que l'axe tourne autour de Ox ? ou de Oz ?

a) forces F parallèles à z



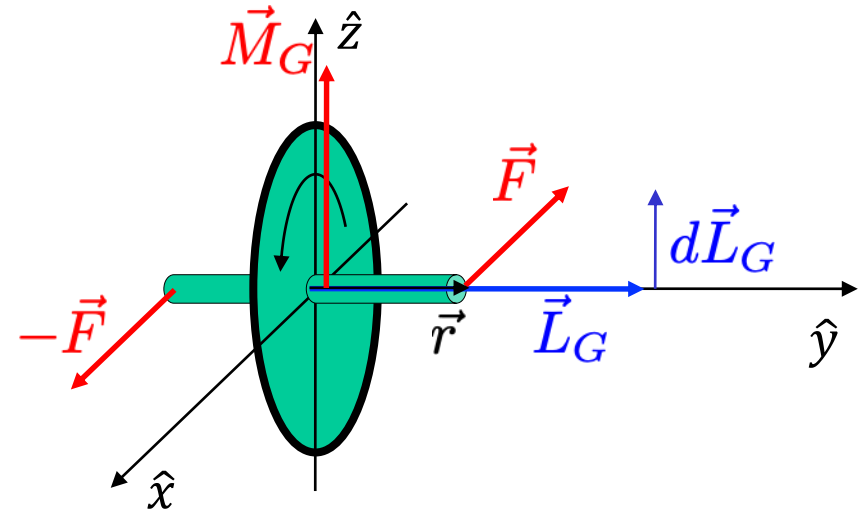
M selon $-\hat{x} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}$ selon $-\hat{x}$

\vec{L}_G tourne dans le plan $\hat{x}\hat{y}$ autour de $O\hat{z}$

Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

b) forces F parallèles à x

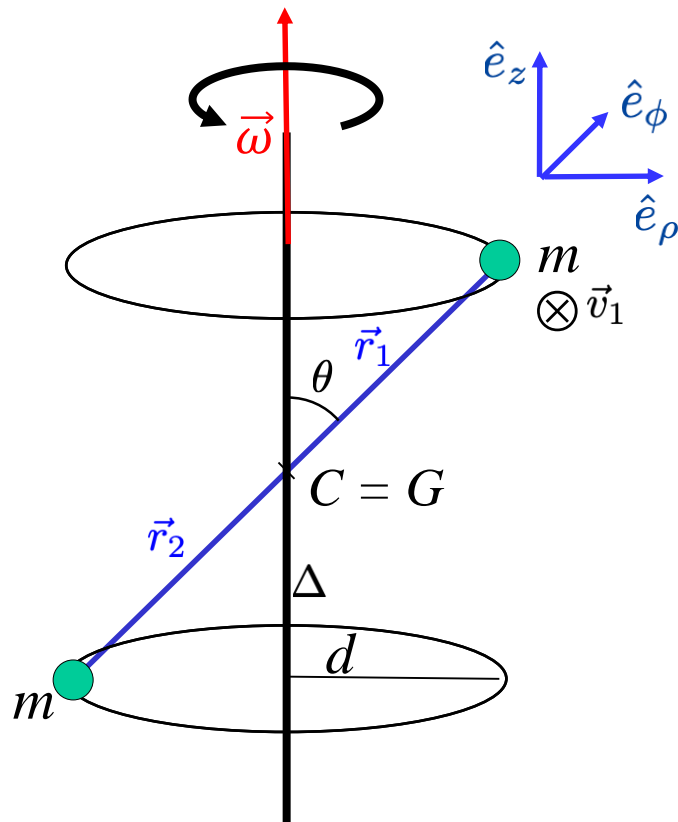


M selon $\hat{z} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}$ selon \hat{z}

\vec{L}_G tourne dans le plan $\hat{y}\hat{z}$ autour de $O\hat{x}$

$$= (\vec{r} \wedge \vec{F}) + (-\vec{r} \wedge -\vec{F}) = 2\vec{r} \wedge \vec{F}$$

8.2 Ex.: deux billes reliées par une tige (sans masse)



L'axe vertical est fixé en bas mais partiellement libre de se déplacer en haut sous l'action de 3 ressorts

Que fera l'axe vertical?

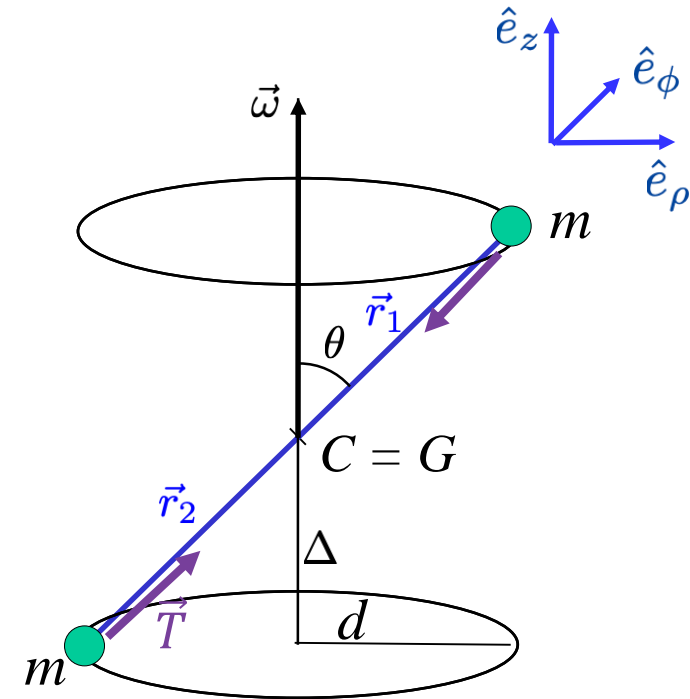
- 1) Ne bouge pas
- 2) Tourne sens horaire
- 3) Tourne sens anti-horaire

8.2 Ex.: deux billes reliées par une tige (sans masse)

Le centre de la tige C a $\vec{v}_C = 0$ et en plus est le centre de masse G ($\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* = 0$):

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = m \vec{r}_1 - m \vec{r}_1 = 0$$

Théorème du moment cinétique
(par rapport au centre de masse G) $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G$



- Cas $v_1 = v_2 = 0$

$$\vec{M}_{C,1} = \vec{r}_1 \wedge (m\vec{g} + \vec{T}) = m r_1 g \sin \theta \hat{e}_{\phi} = -\vec{M}_{C,2}$$

$$\vec{M}_G = \vec{M}_C = \vec{M}_{C,1} + \vec{M}_{C,2} = 0$$

les deux billes restent
en équilibre

$$(\vec{L}_G = 0 \text{ et } \frac{d\vec{L}_G}{dt} = 0)$$

L'axe est fixe

- Deux masses m telles que $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$ par rapport à C
- C est attaché à un axe de support Δ vertical avec \vec{r}_1 faisant un angle θ

8.2 Ex.: deux billes reliées par une tige (sans masse)

Le centre de la tige C a $\vec{v}_C = 0$ et en plus est

le centre de masse G ($\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* = 0$):

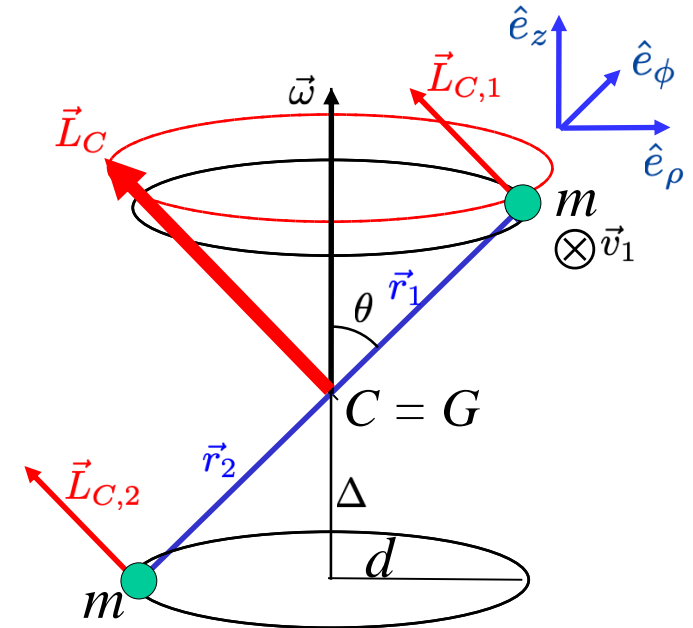
$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = m \vec{r}_1 - m \vec{r}_1 = 0$$

Théorème du moment cinétique
(par rapport au centre de masse G) $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G$

- à $t = 0$ on donne une impulsion tel que $v_1 = v_2 = v$

$$\vec{L}_{C,1} = \vec{r}_1 \wedge m \vec{v}_1 = m r_1 v \sin \theta \hat{e}_z - m r_1 v \cos \theta \hat{e}_{\rho} = \vec{L}_{C,2}$$

$$\vec{L}_G = \vec{L}_{C,1} + \vec{L}_{C,2} = 2\vec{L}_{C,1} = 2m r_1 v (\sin \theta \hat{e}_z - \cos \theta \hat{e}_{\rho})$$

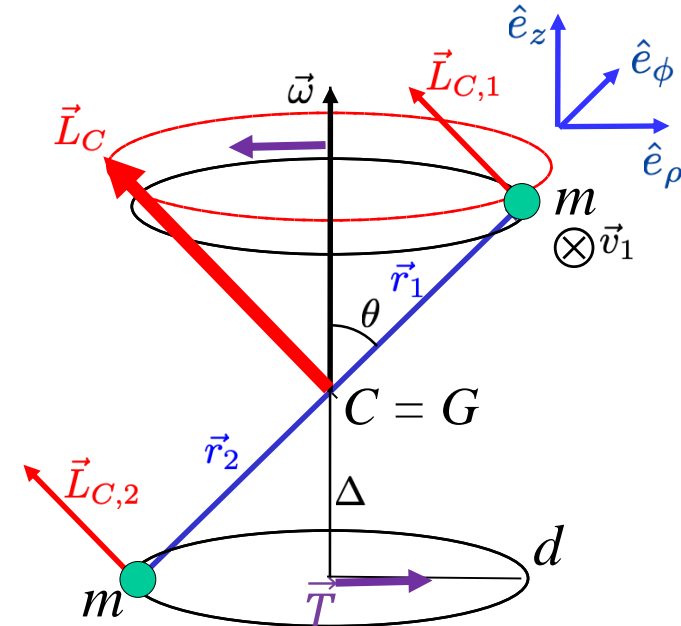


8.2 Ex.: deux billes reliées par une tige (sans masse)

Calcul de $\frac{d\vec{L}_G}{dt}$

En utilisant la formule de Poisson ($\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i$):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_G}{dt} &= \frac{d}{dt} (2mr_1v \sin \theta \hat{e}_z - 2mr_1v \cos \theta \hat{e}_\rho) = \\ 2mr_1v \left(\sin \theta \frac{d\hat{e}_z}{dt} - \cos \theta \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} \right) &= 2mr_1v (\sin \theta \vec{\omega} \wedge \hat{e}_z - \cos \theta \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\rho) = \\ &= -2mr_1v\omega \cos \theta \hat{e}_\phi = \\ &= -2mr_1^2\omega^2 \cos \theta \sin \theta \hat{e}_\phi = \vec{M}_G \\ & \quad (v = r_1\omega \sin \theta = \omega d) \end{aligned}$$

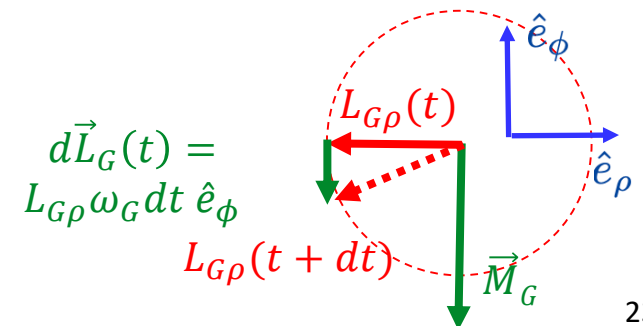


\vec{L}_G précède autour de l'axe Δ avec $\omega_G = \omega = \frac{v}{d}$

Il y a une couple de forces sur l'axe responsable de \vec{M}_G^{ext}

Considérations géométriques: la composante selon \hat{e}_ρ de L_G précède autour de \hat{e}_z avec vitesse angulaire ω_G à déterminer

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_G}{dt} &= L_{G\rho} \omega_G \hat{e}_\phi = -2mr_1v \cos \theta \omega_G \hat{e}_\phi = \vec{M}_G = -2mr_1^2\omega^2 \cos \theta \sin \theta \hat{e}_\phi \\ &\Rightarrow \\ v\omega_G &= r_1 \omega^2 \sin \theta \Rightarrow \omega d \omega_G = d\omega^2 \Rightarrow \omega_G = \omega \end{aligned}$$



8.2 Ex.: quatre billes reliées par une tige (sans masse)

On ajoute deux masses m supplémentaires, afin de réaliser un système symétrique par rapport à l'axe de rotation

$$\vec{L}_{C,1} = \vec{r}_1 \wedge m\vec{v}_1 = mr_1 v \sin \theta \hat{e}_z - mr_1 v \cos \theta \hat{e}_\rho = \vec{L}_{C,2}$$

$$\vec{L}_{C,3} = \vec{r}_3 \wedge m\vec{v}_3 = mr_1 v \sin \theta \hat{e}_z + mr_1 v \cos \theta \hat{e}_\rho = \vec{L}_{C,4}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_G = \vec{L}_C &= \vec{L}_{C,1} + \vec{L}_{C,2} + \vec{L}_{C,3} + \vec{L}_{C,4} = 4mr_1 v \sin \theta \hat{e}_z = 4mdv \hat{e}_z \\ &= 4md^2 \omega \hat{e}_z = I_\Delta \omega \hat{e}_z = I_\Delta \vec{\omega} \end{aligned}$$

$$\vec{M}_{C,1} = \vec{r}_1 \wedge m\vec{g} + \vec{r}_1 \wedge \vec{T} = (mr_1 g \sin \theta - r_1 T \cos \theta) \hat{e}_\phi = -\vec{M}_{C,3}$$

$$\vec{M}_{C,2} = \vec{r}_2 \wedge m\vec{g} + \vec{r}_2 \wedge \vec{T} = (-mr_1 g \sin \theta - r_1 T \cos \theta) \hat{e}_\phi = -\vec{M}_{C,4}$$

$$\vec{M}_G = \vec{M}_C = \vec{M}_{C,1} + \vec{M}_{C,2} + \vec{M}_{C,3} + \vec{M}_{C,4} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_G = I_\Delta \vec{\omega} \quad \text{est conservé et parallèle à } \vec{\omega}$$

I_Δ = moment d'inertie

